1. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   (a) Probar que $\mathbb{R}^n = Im(A) + Nu(B) \iff Im(BA) = Im(B)$. (15 puntos)
   (*Sug.* para la vuelta: si $x \in \mathbb{R}^n$ analizar Bx.)

   (b) Para un n genérico, encontrar matrices A y B distintas, con $rg(A) = 1$ y $dim(Nu(B)) = n-1$ que cumplan $\mathbb{R}^n = Im(A) + Nu(B)$ y para esas matrices calcular $Im(A) \cap Nu(B)$. (10 puntos)

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible.

   (a) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & c^t \\ b & A \end{pmatrix}$ con $b, c \in \mathbb{R}^n$.

      i. Si $c = 0$, probar que B tiene factorización LU si y sólo si A tiene factorización LU. (8 puntos)

      ii. Si $c \neq 0$, mostrar que la afirmación del ítem anterior no es verdadera, exhibiendo un contraejemplo para ciertos b, c y A inversible. Justificar. (7 puntos)

   (b) Siendo $d = 1/(2\|A^{-1}\|)$ y $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida, probar que para cualquier matriz $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, si $\|E\| \leq d$ entonces $A + E$ es inversible. (10 puntos)

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, n \geq 5$, una matriz simétrica definida positiva. Sean z y w la segunda y cuarta columna de la matriz A. Definimos $\widehat{A} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ a la matriz que se obtiene de A luego de eliminar las columnas z y w, y de eliminar las filas z^t y w^t.

   (a) Probar que $\widehat{A}$ es simétrica definida positiva. (10 puntos)

   (b) Siendo d un real positivo, probar que si $\|z\|_2^2 < d$ entonces la matriz $\begin{pmatrix} AA^t & Az \\ z^tA^t & d \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva. (15 puntos)

4. Sea $Q = (q_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal. Llamamos $cl_1(Q), \ldots, cl_n(Q)$ a las columnas de Q. Si $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, definimos $u = \sum_{j=1}^n e_j$ y $v = \sum_{j=1}^n cl_j(Q)$.

   (a) Demostrar que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{i,j} = u^tv$. (6 puntos)

   (b) Deducir que $|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{i,j}| \leq n$ y que se alcanza la igualdad para alguna matriz Q. (7 puntos)

   (c) Probar que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |q_{i,j}| \leq n^{3/2}$. (6 puntos)

   (d) Probar que $\forall x \in \mathbb{R}^n : ||x||_1 \geq ||x||_2$ y deducir que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |q_{i,j}| \geq n$. (6 puntos)

① a) $\Rightarrow)$ Queremos ver que $\mathrm{Im}(BA) = \mathrm{Im}(B)$. Para ello vemos la doble inclusión:

$\subseteq)$ Si $x \in \mathrm{Im}(BA) \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n$ tal que $BAy = x$. $\Rightarrow x = B.(Ay) \Rightarrow x \in \mathrm{Im}\, B$.

$\supseteq)$ Sea $Bx \in \mathrm{Im}\, B$, sabemos por hipótesis que $\exists y \in \mathrm{Im}\, A, \exists z \in \mathrm{Nu}\, B$ tal que $x = Ay + z$. Entonces:

$$Bx = B(Ay + z) = BAy + \underbrace{Bz}_{0 \text{ pues } z \in \mathrm{Nu} B} = (BA)y \Rightarrow Bx \in \mathrm{Im}(BA)$$ como queríamos.

$\Leftarrow)$ Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Queremos hallar $y \in \mathrm{Im}\, A$, $z \in \mathrm{Nu}\, B$ tal que $x = y + z$.
Consideremos $Bx \in \mathrm{Im}\, B$. Por hipótesis, existe un $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Bx = BAv \Rightarrow B(x - Av) = 0$
$\Rightarrow x - Av \in \mathrm{Nu}\, B$

Tomemos $z = x - Av. \in \mathrm{Nu} B$
Entonces $x = \underbrace{Av}_{y \in \mathrm{Im} A} + \underbrace{(x - Av)}_{z \in \mathrm{Nu}\, B}$ como queríamos.

b) Voy a utilizar la condición probada en a). Entonces que $\mathrm{Im}(BA) = \mathrm{Im}\, B$ para garantizar que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im} A + \mathrm{Nu}\, B$.
Voy a intentar hallar A y B que verifiquen $BA = B$ en cuyo caso es inmediato que $\mathrm{Im}\, BA = \mathrm{Im}\, B$.

Como quiero que dim Nu B = n-1, voy a intentar con $B=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $= e_1\cdot e_1^t$

Para elegir A, si tomara B=A, se cumpliría que BA=A, pero necesito $A\neq B$. Puedo entonces repitiendo una fila (no cambia el rango)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\1&0&&\cdots&0\\0&0&\cdots&&\\\vdots&&&&\\0&&&&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

Así:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&\cdots&\cdots&0\\0&&&&\\\vdots&&&&\\0&-&-&-&0\end{pmatrix}=B \text{ como queríamos.}$$

Además $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg}_c A=\dim(\langle(1\,1\,0\ldots0),0,0,\ldots0\rangle)$
$=\dim(\langle(1\,1\,0\ldots0)\rangle)=1$

$\operatorname{rg} B=\dim(\langle e_1\rangle)=1 \underset{\text{Teorema de la dimensión}}{\Rightarrow} \dim(\operatorname{Nu} B)=n-1$

Luego, A y B satisfacen lo pedido.

Además, notemos que $\underbrace{\langle e_2,e_3,\ldots,e_n\rangle}_{\dim=n-1}\subseteq\underbrace{\operatorname{Nu} B}_{\dim n-1}$

$\Rightarrow$ deben ser iguales $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{Nu} B=\langle e_2,\ldots,e_n\rangle}$

$\operatorname{Im} A=\langle \operatorname{col}_1 A,\ldots,\operatorname{col}_n A\rangle=\boxed{\langle e_1+e_2\rangle}$

$\{0\}=\operatorname{Nu} B\cap\operatorname{Im} A$ Queremos ~~…~~ ver que si $\beta_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ son tales que: $\beta(e_1+e_2)=\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n$ entonces $\beta=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$.

Pero:

$\beta(e_1+e_2)=\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n \Leftrightarrow 0=-\beta e_1+(\alpha_2-\beta)e_2+\alpha_3e_3+\ldots+\alpha_ne_n$

$\underset{\{e_1,\ldots,e_n\}\text{ es LI}}{\Leftrightarrow}$ $\beta=0$ $\quad\alpha_2-\beta=0$ $\quad\alpha_3=\ldots=\alpha_n=0$
$\alpha_2=\beta=0$

Luego $\operatorname{Nu} B\cap\operatorname{Im} A=\{0\}$ (también se podría haber hecho con el teorema de la dimensión para la suma).

② a) 1) $\boxed{\text{Si } C=0 \quad B \text{ tiene } LU \Leftrightarrow A \text{ tiene } LU}$

$\Leftarrow$) Si $A = L \cdot U$ veamos cómo hallar la factorización de $B = \tilde{L}\tilde{U}$

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline x & C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} y & z^t \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

pongo 1 porque $\tilde{L}$ debe tener unos en la diagonal.

Haciendo la multiplicación por bloques se obtiene: $\boxed{y = 1}$

$z^t = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$

$\underbrace{x y}_{1} = b \Rightarrow \boxed{x = b}$

$\underbrace{x z^t}_{0} + CD = A \rightarrow$ tomo $\boxed{\begin{array}{l} C = L \\ D = U \end{array}}$ podrías tomar otros

$$\Rightarrow B = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & L \end{array}\right)}_{\tilde{L}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U \end{array}\right)}_{\tilde{U}}$$

luego B tiene LU

($\tilde{L}$ tiene unos en la diagonal pues L tiene unos en la diagonal).

$\tilde{L}$ es triangular inferior gracias a que L lo es; $\tilde{U}$ es triangular superior gracias a que U lo es.

$\Rightarrow$) A lo sumo asumimos que B tiene LU, es decir, $B = \tilde{L} \cdot \tilde{U}$ con $\tilde{L}$ triangular inferior con unos en la diagonal y $\tilde{U}$ triangular superior. Entonces, escribiendo en bloques, hay L triang. inferior y U triangular ~~sup~~ superior tales que:

$$B = \tilde{L} \cdot \tilde{U} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline x & L \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} y & z^t \\ \hline 0 & U \end{array}\right)}_{\text{sabemos que existe pues } B \text{ tiene } LU}$$

Nuevamente planteando el ~~sistema~~ producto por bloques:

$y = 1$

$z = 0$

$x = b$

$\cancel{xz^t} + L\cdot U = A \Rightarrow \boxed{A = LU}$

y como L es triang inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior $\Rightarrow A$ tiene LU.

ii) Voy a utilizar para hallar el ejemplo el criterio visto en la teórica:

Si A es inversible, A tiene $LU \Leftrightarrow$ todas sus submatrices principales son no singulares.

Quiero B tq sus submatrices principales sean inversibles, pero que A no lo cumpla.

tomando $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$ $\det A = -1 \Rightarrow$ inversible.

Pero no tiene LU pues tiene el menor principal $\boxed{0}$ con $\det = 0$.

$$B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \hat{a} & \hat{b} \\ \hline \hat{c} & 0 & 1 \\ \hat{d} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Quiero que $1 \neq 0$ ✓

$$\boxed{\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & \hat{a} \\ \hat{c} & 0 \end{pmatrix} &= 1\cdot 0 - \hat{a}\hat{c} = -\hat{a}\hat{c} \neq 0 \\ \det B &= \hat{b}\hat{c} + \hat{a}\hat{d} - 1 \neq 0 \end{aligned}}$$

Tomo $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{d} = 1$

$$B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} \det(\boxed{1}) &= 1 \neq 0 \\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= -1 \neq 0 \\ \det B &= 1 \neq 0 \Rightarrow B \text{ es inversible.} \end{aligned}$$

Luego B tiene LU, por el criterio, pero A no tiene LU.

5/7

FECHA

(6) Notemos que

$$A+E = \underbrace{A}_{\text{inversible}} (I+A^{-1}E)$$

Basta ver entonces que $I+A^{-1}E$ es inversible.

Notemos que $\|A^{-1}E\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|E\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{1}{2\|A^{-1}\|} = 1/2 < 1$

norma inducida es submultiplicativa

Veamos que vale:

Lema: Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\|B\| < 1$.
$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $I+B$ es inversible

Demo: Veamos que $\ker(I+B) = \{0\}$, luego $I+B$ es inyectiva. Pero por el teo de las dimensiones $\dim \operatorname{Im}(I+B) = n - \underbrace{\dim \ker(I+B)}_{0} = n$

luego B también sería sobreyectiva (como transformación lineal) luego $I+B$ sería inversible.

Sea $x \in \ker(I+B)$. $\Rightarrow (I+B)x = 0 \Rightarrow x + Bx = 0$
$\Rightarrow Bx = -x \Rightarrow \|Bx\| = \|x\|$

Pero $\|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\|$ y si fuese $x \neq 0$
$\Rightarrow \|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\| \underset{\|B\|<1}{<} \|x\|$ Absurdo!

Luego $x = 0 \Rightarrow I+B$ ~~[illegible]~~ tiene $\ker = \{0\}$
$\Rightarrow$ es inversible.

Para terminar tomamos $B = A^{-1}E$, $\|B\| \leq 1/2 < 1$ y usamos el lema.

③ b) En primer lugar, notemos que como

A es sdp $\Rightarrow$ A es inversible $\Rightarrow$ $A.A^t$ es sdp.

(pues si $x \neq 0 \Rightarrow$ como A^t es inversible por serlo A

$$A^t x \neq 0 \Rightarrow x^t A A^t x = (A^t x)^t (A^t x) = \|A^t x\|_2^2 > 0$$

$\uparrow$ $A^t x \neq 0$)

Luego, $A.A^t$ satisface que todos los determinantes de sus submatrices principales son positivos (A sdp $\Rightarrow A = L.L^t$ Cholesky $\Rightarrow \det(A) = \det(L)\det(L^t) = \det(L)^2 > 0$ y las submatrices ppales de A también son sdp $\Rightarrow$ su det también es >0).

Por el criterio de lo que basta ver que el determinante de cada submatriz principal es >0. Como para $A.A^t$ ya es cierto, falta sólo ver que el det de toda la matriz es >0.

Pero si "triangulamos" por bloques nos queda que:

triangular inferior $\det = 1.1\ldots1 = 1$

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \alpha^t & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} AA^t & Az \\ \hline z^t A^t & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA^t & Az \\ \hline 0 & x \end{array}\right)$$

quiero que quede 0

tomo $\alpha = -(A^t)^{-1} z$.

Así:

$$\alpha^t AA^t + z^t A^t = -z^t A^{-1} A A^t + z^t A^t = 0$$

y $x = \alpha^t A z + d = -z^t A^{-1} A z + d = -\|z\|_2^2 + d$

El determinante del producto es $1 \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} AA^t & Az \\ \hline z^t A^t & d \end{array}\right)$

Pero del segundo término el determinante es:

$$\det(AA^t) \cdot x = \underbrace{\det(AA^t)}_{\substack{>0 \text{ pues} \\ AA^t \text{ es SDP}}} \cdot \underbrace{(d - \|z\|_2^2)}_{\substack{>0 \\ \text{por suposición}}}$$

Luego $\det\left(\begin{array}{c|c} AA^t & Az \\ \hline z^tA^t & d \end{array}\right) > 0$ como queríamos,

luego es sdp.

Escaneado con CamScanner

a) Demostramos que en general, si A es SDP y B consiste en A luego de eliminar la fila i y la columna i $\Rightarrow$ B es SDP.
Aplicando este resultado dos veces seguidas, una para $i=2$ y otra para $i=4$, se obtiene que $\hat{A}$ es SDP.

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \text{fil } i \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c} \overbrace{A_{11}}^{i-1} & & \overbrace{A_{12}}^{n-i} \\ \hline & & \\ A_{12}^t & & A_{22} \end{array} \right) \quad \text{col}_i$$

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{12}^t & A_{22} \end{array} \right)$$

B es simétrica, pues como A es simétrica, $A_{11}^t = A_{11}$ y $A_{22}^t = A_{22}$.

Sea $x = \begin{pmatrix} a \\ \hline b \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, i-1 \\ \}\, n-i \end{array}$ un vector de $\mathbb{R}^{n-1}$ no nulo.

$$x^t B \cdot x = (a^t \ b^t) \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^t & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= (a^t \ b^t) \cdot \begin{pmatrix} A_{11} a + A_{12} b \\ A_{12}^t a + A_{22} b \end{pmatrix}$$

$$= a^t A_{11} a + a^t A_{12} b + b^t A_{12}^t a + b^t A_{22} b$$

Queremos ver que es > 0 si $x \neq 0$.

Tomemos $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} a \\ \boxed{0} \\ b \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ésima posición.

Luego $x \neq 0 \Rightarrow \tilde{x} \neq 0$

$$\tilde{x}^t \cdot A \cdot \tilde{x} = (a^t \ 0 \ b^t) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & u & A_{12} \\ \hline u^t & a_{ii} & v^t \\ \hline A_{12}^t & v & A_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ & u \\ \hline A_{12}^t \; u & A_{22} \end{array}\right) \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} \cdot \binom{a}{0} + \binom{A_{12}}{u} \cdot b \\ (A_{12}^t \; u) \cdot \binom{a}{0} + A_{22} b \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_{11} \binom{a}{0} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & * \\ \hline *^t & a_{ii} \end{array}\right) \cdot \binom{a}{0} = \binom{A_{11} a}{*^t a}$$

$$\tilde{x}^t A \tilde{x} = (a^t \;\; 0 \;\; b^t) \cdot \begin{pmatrix} A_{11} a + A_{12} b \\ u^t a + v^t b \\ A_{12}^t a + A_{22} b \end{pmatrix}$$

$$= a^t A_{11} a + a^t A_{12} b + b^t A_{12}^t a + b^t A_{22} b > 0$$

pues $\tilde{x} \neq 0$ y A es dp.

$\Rightarrow x^t B x > 0 \quad \forall x \neq 0.$

$\Rightarrow B$ es dp como queríamos.

(Este producto por bloques, se puede probar pero lo armo de haciendo un primer producto y volviendo a descomponer

$$\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ & & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} \\ \hline \\ \hline \\ \end{array}\right)$$

1° hago el producto donde está marcado más grueso y después uso bloques de nuevo.

Esta me gustó!! :)

<u>Otra opción para hacerlo</u>. Tomo P una matriz de permutación, que ~~[illegible]~~ coloca la i-ésima fila en la última fila y mantiene el orden relativo de las demás. P^t a derecha hace lo mismo pero con la i-ésima columna. Como P es inversible, con un ej. de la guía

A es SDP $\Leftrightarrow$ PAP^t es SDP. Luego bastaba ver solamente que sacando la última fila y columna queda SDP. Pero eso lo probamos en la teórica.

(4) $Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ cl_1(Q) & \cdots & cl_n(Q) \\ | & & | \end{pmatrix}$

a) $$u^t v = \left(\sum_{i=1}^n e_i\right)^t \cdot \sum_{j=1}^n cl_j(Q)$$

$$= \sum_{i=1}^n e_i^t \cdot \sum_{j=1}^n cl_j(Q)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{e_i^t \cdot cl_j(Q)}_{\underbrace{(0\,0 \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}\, 0 \ldots) \cdot \begin{pmatrix} q_{1j} \\ \vdots \\ q_{nj} \end{pmatrix}}_{= q_{ij}}} = \boxed{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}}$$

b) ~~Por a)~~

NO VA.

$$\cancel{\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}\right| = |u^t v| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|u\|_2 \cdot \|v\|_2}$$

~~Pero~~ $\cancel{\|u\|_2 = \|(1, 1, \ldots, 1)\| = \sqrt{\underbrace{1^2 + \ldots + 1^2}_{n \text{ veces}}} = \sqrt{n}}$

$$\cancel{\|v\|_2 = \left\|\sum_{j=1}^n cl_j(Q)\right\| \leq \sum_{j=1}^n \underbrace{\|cl_j(Q)\|}_{\substack{=1 \text{ pues} \\ Q \text{ es ortogonal}}}}$$

NO VA. ~~Por a)~~ $\cancel{\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}\right| = |u^t v| =}$

(el b) está al final)

c) Consideremos la matriz $|Q| = \begin{pmatrix} |q_{11}| & \cdots & |q_{1n}| \\ \vdots & & \vdots \\ |q_{n1}| & \cdots & |q_{nn}| \end{pmatrix}$

que resulta de tomar valor absoluto en cada coordenada de Q.

Definiendo $\tilde{v} = \sum_{j=1}^{n} cl_j(|Q|)$, por el inciso a) (la misma cuenta) resulta que:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |q_{ij}| = u^t\tilde{v} \le |u^t\tilde{v}| \underset{\text{Cauchy - Schwarz}}{\le} \|u\|_2 \cdot \|\tilde{v}\|_2$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\underbrace{1^2+\cdots+1^2}_{n}} = \sqrt{n} = n^{1/2}$$

$$\|\tilde{v}\|_2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} cl_j(|Q|) \right\|_2 \le \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \|cl_j(|Q|)\|_2}_{} = n$$

la norma 2 no cambia al poner módulo a los coeficientes.
Como Q es ortogonal
$\Rightarrow \|cl_j(|Q|)\|_2 = \|cl_j(Q)\|_2 = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |q_{ij}| \le n^{1/2} \cdot n = n^{3/2}.$$

d) $\|x\|_1 \ge \|x\|_2$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ge \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 \ge \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i|\cdot|x_j| \ge \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

Esta última desigualdad es cierta pues todos los términos de la derecha aparecen en la suma de la izquierda (para $i=j$ $|x_i|\cdot|x_j| = |x_i|^2$).

Luego, como era una cadena de $\Leftrightarrow$ vale que $\|x\|_1 \ge \|x\|_2$.

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |q_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} \|fil_i(Q)\|_1 \underset{\text{por lo anterior}}{\ge} \sum_{i=1}^{n} \|fil_i(Q)\|_2 = n$$

las filas tienen $\|\cdot\|_2 = 1$ pues Q es ortogonal.

FECHA

b) Notemos que $v = \sum_{j=1}^{n} c_j(Q) = Q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = Q \cdot u$

Luego

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \right| \overset{a)}{=} \left| u^t v \right| = \left| u^t (Q u) \right|$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|u\|_2 \cdot \|Q u\|_2 \overset{Q \text{ es ortogonal}}{=} \|u\|_2^2$$

Como $u = \underbrace{(1\ 1\ \dots\ 1)}_{n} \Rightarrow \|u\|_2^2 = \underbrace{1^2 + \dots + 1^2}_{n} = n$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \right| \leq n$$

Tomando $Q = Id$ se alcanza la igualdad:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \right| = n$$

son n unos y los demás son ceros.

NOTA